Équations et inéquations irrationnelles

Cours 1

On s'intéresse aux équations de la forme $\sqrt{A(x)} = B(x)$.
On va utiliser pour cela une propriété.

I. Propriété

• Énoncé :

a et b sont deux réels.

$\sqrt{a} = b$ si et seulement si $a = b^2$ et $b \geqslant 0$.

• Démonstration :

Sens direct :

On suppose que $\sqrt{a} = b$.

On peut alors en déduire deux informations :

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = b^2$ soit $a = b^2$.
$b \geqslant 0$

Sens réciproque :

On suppose que $a = b^2$ et $b \geqslant 0$.

$a = b^2$ donc $\sqrt{a} = \sqrt{b^2}$ soit $\sqrt{a} = |\, b \,|$.

Or $b \geqslant 0$ donc $\sqrt{a} = b$.

II. Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\sqrt{1-x^2} = x$ (1) ;

$\sqrt{x^2+5} = x+1$ (2) ;

$\sqrt{x^2+5x+3} = 2x+1$ (3).

Solutions :

(1) est successivement équivalente à :

$1-x^2 = x^2$ et $x \geqslant 0$

$2x^2 = 1$ et $x \geqslant 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$ et $x \geqslant 0$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

(2) est successivement équivalente à :

$x^2+5 = (x+1)^2$ et $x+1 \geqslant 0$

$x^2+5 = x^2+2x+1$ et $x \geqslant -1$

$2x = 4$ et $x \geqslant -1$

$x = 2$ et $x \geqslant -1$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 = \{2\}$

(3) est successivement équivalente à :

$x^2+5x+3=(2x+1)^2$ et $2x+1 \geqslant 0$

$x^2+5x+3=4x^2+4x+1$ et $x \geqslant -\frac{1}{2}$

$-3x^2+x+2=0$ et $x \geqslant -\frac{1}{2}$

polynôme du second degré

($x=1$ ou $x=\frac{2}{3}$) et $x \geqslant -\frac{1}{2}$

$x=1$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3=\{1\}$

Cours 2

On s'intéresse aux équations de la forme $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$.
On va utiliser pour cela une propriété.

I. Propriété

• Énoncé :

> a et b sont deux réels quelconques
> $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ si et seulement si $a = b$ et $b \geqslant 0$.

• Démonstration :

Sens direct :

On suppose que $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.
On a alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(\sqrt{b}\right)^2$ soit $a = b$.

De plus $b \geqslant 0$.

Sens réciproque :

On suppose que $a = b$ et $b \geqslant 0$.

On a alors $a \geqslant 0$.

De plus, on peut écrire $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

On retiendra :

$\sqrt{a} = \sqrt{b}$ si et seulement si $a = b$ et $b \geqslant 0$

si et seulement si $a = b$ et $a \geqslant 0$

II. Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x}$ (1) ;

$\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+1}$ (2) ;

$\sqrt{x^2+3}=\sqrt{x+2}$ (3).

Solutions :

• (1) est successivement équivalente à :

$x^2-1=x$ et $x \geqslant 0$

$x^2-x-1=0$ et $x \geqslant 0$

$\left(x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $x \geqslant 0$

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

• (2) est successivement équivalente à :

$2x-1=x+1$ et $x+1 \geqslant 0$

$x=2$ et $x \geqslant -1$

$x=2$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\{2\}$

• (3) est successivement équivalente à :

$x^2 - x + 1 = 0$ et $x \geqslant -2$ Considérons le polynôme $x^2 - x + 1$ e . Son discriminant est $\Delta = -3$. $\Delta < 0$ donc le polynôme $x^2 - x + 1$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3 = \varnothing$

Cours 2'

On s'intéresse aux équations de la forme $\sqrt{A(x)} = -\sqrt{B(x)}$.
On va utiliser pour cela une propriété.

I. Propriété

• Énoncé :

> a et b sont deux réels quelconques
> $\sqrt{a} = -\sqrt{b}$ si et seulement si $a = b = 0$.

• Démonstration :

Quasiment évidente.

II. Exemples

Cours 3

Équations avec plusieurs radicaux

$\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5} + 1 \qquad (1)$

$\sqrt{2-x} = \sqrt{-3x+5} + 1 \qquad (2)$

$\sqrt{2x-\sqrt{x+1}} = \sqrt{2x+3} - 1 \qquad (3)$

$\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}} = 2 \qquad (4)$

Cours 4

Inéquations irrationnelles

I. Inéquations de la forme $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$

• Règle :

a et b sont deux réels quelconques

$\sqrt{a} > \sqrt{b}$ si et seulement si $\begin{cases} a > b \\ b \geq 0 \end{cases}$.

• Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\sqrt{2x-1} > \sqrt{x-4}$ (1)

$\sqrt{2x-1} > \sqrt{4-x}$ (2)

(1) est successivement équivalente à :

$$\begin{cases} 2x-1 > x-4 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$x \geq 4$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1 = [4\,;+\infty[$$

(2) est successivement équivalente à :

$$\begin{cases} 2x-1>4-x \\ 4-x\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x>5 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>\dfrac{5}{3} \\ x\leq 4 \end{cases}$$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2=\left]\frac{5}{3}\,;4\right]$$

II. Inéquations du type $\sqrt{A(x)}>B(x)$

• Règle :

> a et b sont deux réels quelconques.
>
> $\sqrt{a}>b$ si et seulement si $\begin{cases} b\geq 0 \\ a>b^2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} b<0 \\ a>0 \end{cases}$.

• Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{2-x}>x+4$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 2-x>(x+4)^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+4<0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -4 \\ 2-x>x^2+8x+16 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x<-4 \\ x\leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -4 \\ x^2+9x+14>0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad x<-4$$

Considérons le polynôme $x^2+9x+14$.
Ses racines sont – 2 et – 7.

(1) est successivement équivalente à :

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ -7 < x < -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad x < -4$$

$$-4 \leq x < -2 \quad \text{ou} \quad x < -4$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$$S =]-\infty\,;-2]$$

III. Inéquations du type $\sqrt{A(x)} < B(x)$

• Règle :

a et b sont deux réels quelconques.

$$\sqrt{a} < b \text{ si et seulement si } \begin{cases} a < b^2 \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}.$$

• Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$$x+3 > \sqrt{x+1} \qquad (1)$$

$$\sqrt{x^2+2x-3} < 2x+1 \qquad (2)$$